風險值計算說明

1.1 何謂風險值

1.1.1 風險值的定義

VaR（風險值）

風險值的意義簡單來說就是基於決策者的意思，在特定機率、特定期間內，某特定投資組合因市場變動可能產生的最大損失。

1.1.2 一般分配的風險值

首先定義 W_0 為原始投資額、R 表示資產報酬率，在目標期間終了時其投資組合價值為：$W = W_0(1+R)$，而 R 的期望值以及波動度分別為 μ 與 σ。在特定信賴水準 c 下，投資組合的最低價值為 $W^* = W_0(1+R^*)$，而風險值被定義為相對於平均數的損失，其金額為：

$$\text{風險值（相對）} = E(W) - W^* = -W_0(R^* - \mu) \tag{1.1}$$

有時候，風險值被定義為絕對風險值；即風險值是相對於零值而非期望值，其公式如下：

$$\text{風險值（絕對）} = W_0 - W^* = -W_0 R^* \tag{1.2}$$

1.1.3 參數分配的風險值

計算風險值時，通常會假設其分配為常態，並利用乘數因子或信賴水準加以導出風險值，此種方法稱為參數法(parametric)。首先以 f(R)表示 R 的機率密度函數(pdf)，在信賴機率水準為 1-c%情況下，投資組合報酬率低於臨界報酬 R^* 的機率為：

$$\Pr ob(R < R^*) = \int_{-\infty}^{R^*} f(R)dR = c\% \tag{1.3}$$

接下來利用隨機變數標準化程序，將上式轉換為期望值為 0、標準差為 1 的標準常態分配。假設隨機變數 Z 為標準常態分配，即 Z~N(0,1)，則上式可轉換如下：

$$\Pr ob(R < R^*) = \Pr ob(Z < \frac{R^* - \mu}{\sigma}) = c\%$$

經由標準常態分配的分位數表，可查得不同 c%的相對應分位數 α：

$$-\alpha = \frac{-\left|R^*\right| - \mu}{\sigma} \quad 則 \quad R^* = -\alpha\sigma + \mu \tag{1.4}$$

若我們假設參數μ與σ都是以日單位為基礎來表示，則我們所考慮的時間區間Δt，也是以日為單位，將公式(1.4)代入公式(1.1)及(1.2)即可得：

$$相對風險值 = -W_0(R^* - \mu) = W_0\alpha\sigma\sqrt{\Delta t} \tag{1.5}$$

$$絕對風險值 = -W_0R^* = W_0(\alpha\sigma\sqrt{\Delta t} - \mu\Delta t) \tag{1.6}$$

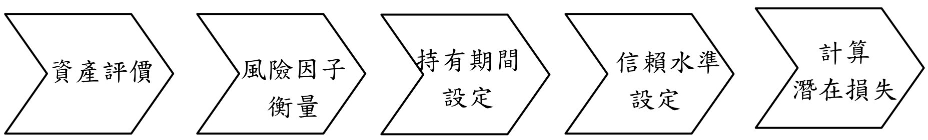
相對風險值的估算中僅需估計資產報酬率標準差σ，可避免平均報酬μ估算誤差問題，因此基本上會利用相對風險值之計算方法，但本系統主要表示非預期損失部分，因此必須扣除資產之預期損益(μW)，即呈現出的是絕對風險值。由於實務上 VAR 的評估期間甚短(通常為一天)，平均報酬率通常不顯著異於 0，因此在線性資產部分，將假設平均報酬率為 0，即相對風險值等於絕對風險值；但在非線性資產部分，本系統會將期望損益考慮進去。

1.2 計算風險值之步驟

舉例來說，假設我們以 99%之信賴水準去衡量 10 天期 1 百萬元之投資組合資產的風險值，則其計算之步驟如下：

- 投資組合之評價（例如：評價結果為 1 百萬元）
- 衡量風險因子的波動性（例如：權益因子、利率因子與匯率因子之波動度）
- 設定資產持有期間（例如：Basel 規定為 10 天）
- 設定信賴水準(例如：Basel 規範為 99%)
- 依據上述參數，選定適合之模型計算出其風險值（例如局部評價法或完全評價法）

圖 1-1 風險值計算步驟



計算範例：

$$100M \times 15\%(年) \times \sqrt{(10/252)} \times 2.33 = 7M$$

1.3 波動度之模型建立

1.3.1 移動平均法

移動平均法為估計資產報酬變異數最單純且最直接的方法，其觀念是以移動固定視窗長度(T期)的方式，求算報酬率偏離平均值的狀況，再加以平均。移動平均法的計算公式為

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^{T} \frac{(r_i - \mu)^2}{T-1} \tag{1.7}$$

其中 r_i 為時間i 的報酬率，μ 為過去T筆資料期間的平均報酬率。

移動平均法之缺點在於給予過去每筆資料相同的權重，忽略了愈近期的資料應會提供愈契合現在市場狀況的訊息；另外也無法描述波動性群聚(cluster)與波動性隨時間而改變的特性。

移動平均法可用於具有常態分配且彼此獨立之個別價格變動率之投資組合中，因其常態分配的特性，個別資產組合的投資組合也趨近於常態分配。並提供金融機構一個估計VaR快速便捷的方法，該方法係計算出過去一段期間風險因子價格變動的標準差，再求出風險值。移動平均法的VaR計算方法如（1.8）式，其中 Z_α 表示信賴係數為 α 時標準常態分配中單尾之臨界值，σ_P 為投資組合價格變動率的標準差，而 t 表示持有該投資組合之持有期間。

$$VaR = Z_\alpha \sigma_P \sqrt{t} \tag{1.8}$$

1.3.2 投資組合之模型說明

假設每個部位之價格變動率服從聯合常態分配，若價格變動為 ΔS ，則可以（1.9）式表示，其中 μ 為每一個部位之期望價格變動率，Σ 為各部位價格變動率之間的共變異矩陣，其中 σ_{ij} 表示為第 i 個部位的價格變動率與第 j 個部位的價格變動率之間的共變異數。

$$\Delta S \quad \sim N(\mu, \Sigma) \tag{1.9}$$

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_N \end{bmatrix}_{N\times 1} \qquad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \cdots & \sigma_N^2 \end{bmatrix}_{N\times N}$$

部位價格變動率為常態分配，而投資組合是由各部位加總而成，所以投資組合也會

服從常態分配。設CF為各部位之現金流量，亦即每一部位在該投資組合之權數，為*N×1*的矩陣，因此投資組合之期望價格變動率等於$CF'\mu$，而σ_P^2為投資組合價格變動率之變異數。有了投資組合價格變動率之變異數之後，即可計算風險值。

VaR計算方式為$VaR = Z_\alpha \sigma_p \sqrt{t}$，其中$\sigma_P = \sqrt{CF'\Sigma CF}$。

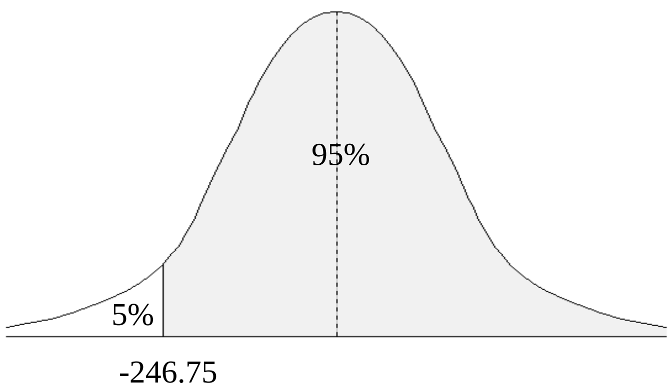
$$\Delta P \quad \sim N(\mu_P, \sigma_p^2)$$

$$\mu_p = CF'\mu$$

$$\sigma_P^2 = CF'\Sigma CF$$

舉例來說，假設預估資料的平均數報酬為 0 萬元，標準差為 150 萬元，在 95%機率下，如果市場的變動是往有利方向變動，對企業而言將不致造成任何問題。反之，如果市場的波動是往不利方向變動，則對企業將有相當的影響，因此企業應摒除統計上雙尾對稱 95%信賴區間的估計法，而以單尾觀點，考慮最大估計損失。簡言之，最大估計損失為 95%信賴區間單尾（不利一方）估計，左側的信賴區間落在$\mu - 1.645\sigma = -246.75$萬元，即為最大估計損失。（如圖 1-2 所示）

圖 1-2 報酬常態分配



$\mu = 0 \qquad \sigma = 150$萬

機率 95%

最大估計損失為$\mu - 1.645\sigma = -246.75$萬元

1.3.3 指數移動平均法(EWMA)

指數移動平均法又稱為 RiskMetrics Method 其計算方式是以 Asset-Normal 為前提假設，RiskMetrics 基本上是以指數加權移動平均法來計算風險值，主要精神在權數會隨著時間不同而有差異，距觀察時點越近的其權數越大，距觀察時點越遠權數越小。指數移動平均法的變動率計算公式如（1.10）式。此法假設過去資訊與鄰近資訊對參數估計的效果應為不同，故給予不同的權數，其模式如下(1.10)：

$$\sigma_{t+1} = \sqrt{(1-\lambda)\sum_{s=t-k}^{t} \lambda^{t-s}(X_s-\mu)^2} \tag{1.10}$$

其中 σ_t = 從第 t 天起開始的投資組合估計標準差

k = 移動平均所包含的天數

X_s = 投資組合價值在第 s 天的報酬率

μ = 投資組合價值平均變動

λ = 衰退因子，估計值愈久，權數愈小

指數移動平均公式分解：

$$\sigma_{t+1}^2 = (1-\lambda)(x_t-\mu)^2 + \lambda\sigma_t^2 \tag{1.11}$$

$$= (1-\lambda)\left[(x_t-\mu)^2 + \lambda(x_{t-1}-\mu)^2 + \lambda^2(x_{t-2}-\mu)^2 + \ldots\right]$$

例如： $\sigma_{31}^2 = (1-\lambda)\left[(x_{30}-\mu)^2 + \lambda(x_{29}-\mu)^2 + \lambda^2(x_{28}-\mu)^2 + \ldots\right]$

指數加權移動平均法其共變異數之計算公式如(1.12)式：

$$\begin{aligned}
\sigma_{xy,t+1}^2 &= \sum_{i=0}^{\infty} \omega_i X_{t-i} Y_{t-i} \\
&= (1-\lambda)\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i X_{t-i} Y_{t-i} \\
&= (1-\lambda)\left[X_t Y_t + \lambda X_{t-1} Y_{t-1} + \lambda^2 X_{t-2} Y_{t-2} + \ldots\right] \\
&= (1-\lambda) X_t Y_t + \lambda\{(1-\lambda)\left[X_{t-1} Y_{t-1} + \lambda X_{t-2} Y_{t-2} + \lambda^2 X_{t-3} Y_{t-3} + \ldots\right]\} \\
&= (1-\lambda) X_t Y_t + \lambda \sigma_{xy,t}^2
\end{aligned} \tag{1.12}$$

指數移動平均法中，由於結果可能產生敏感度差異，因而可以選擇的參數大致有「衰退因子」與「衡量期間」。衰退因子的選取，隱含著對於離目前越近時間的資訊，給予越重視的程度，在 RiskMetrics 技術手冊中，對於美國股市分析最適的衰退因子，估計值為 0.94，我們對於台灣股票、利率、外匯市場作衰退因子研究，其結果與 RiskMetrics 差異不大，其日資料之衰退因子為 0.93。

1.3.4 加權移動平均法

由上述兩種變異數計算方式可知，兩者差異主要為對於歷史報酬權數前者為均等，後者為依時間遞增，代表歷史對於現在的影響程度應該有所不同，這樣的思考下，本系統另外提供使用者對於所選取的歷史區間資料自行訂定權數，且權數加總應為 100%。其變異數表示如下：

$$\sigma_{t+1}^{2} = \alpha_t (x_t - \mu)^2 + \alpha_{t-1}(x_{t-1} - \mu)^2 + \alpha_{t-2}(x_{t-2} - \mu)^2 + \ldots \tag{1.13}$$

α = 各日變異權數

表 1-1 加權平均權數設定

移動加權平均				合計
日期	1~10	11~20	21~30	30 天
變異權數	50%	30%	20%	100%

天數：由使用者自行分割,但分割後之總天數應等於所定之觀察天數

變異權數：所分割區間應有相關之權數,權數合計等於 100%

1.3.5 GARCH 法

典型的 ARCH(q)模型可以表示如下：

$$y_t \mid \Omega_t \sim N(x_t a, \sigma_t^2) \tag{1.14}$$

$$\varepsilon_t = y_t - x_t a \tag{1.15}$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_{t-2}^2 + \ldots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2 \tag{1.16}$$

而 GARCH 可說是一般化的 ARCH 模型，將 AR 和 MA 的觀念用在估計條件變異數。如前述(1.14)~(1.16)式，典型的 GARCH(p,q)模型可以表示如下：

$$y_t \mid \Omega_t \sim N(x_t a, \sigma_t^2) \tag{1.17}$$

$$\varepsilon_t = y_t - x_t a \tag{1.18}$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \sigma_{t-i}^2 \tag{1.19}$$

而 Bollerslev (1992)實證發現 GARCH 大部分的情況中，GARCH(1,1)已經是一個良好的波動模型，因此我們使用 GARCH(1,1)為最適模型。

1.3.6 IGARCH 法

IGARCH 模型即對 GARCH 的參數做了限制，IGARCH(p,q)模型可以表示為：

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{q} \beta_i \sigma_{t-i}^2 \qquad (1.20)$$

條件為：$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i + \sum_{i=1}^{q} \beta_i = 1$

1.3.7 TGARCH 法

考慮槓桿效果而加以處理的模型稱之為 TGARCH(Threshold GARCH)，槓桿效果指的是該資產的上一期價格若下跌，代表上一期的報酬率為負值，則會增加持有該資產的風險；而上一期價格若上漲，則持有該資產的風險會較低。如果 y_t 代表某金融資產在 t 時間之報酬率，以 $y_t = a_0 + \varepsilon_t$ 表示，則當 ε_{t-1}<0 時，表示上一期的報酬低於 a_0，因為 $\varepsilon_{t-1} = y_{t-1} - a_0$ <0，可以說對金融資產而言是個壞消息，而當 $\varepsilon_{t-1} \geqq 0$ 時，表示對金融資產是好消息。

TGARCH 模型如下：

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma \varepsilon_{t-1}^2 D_{t-1} + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \qquad (1.21)$$

$$D_{t-1} = 1 \text{ if } \varepsilon_{t-1} < 0$$

$$= 0 \text{ if } \varepsilon_{t-1} > 0$$

上式估計的結果若是 γ>0，且在統計檢定上具顯著意義，我們就可以說槓桿效果存在。而如果前一期是壞消息，$D_{t-1} = 1$，則(1.21)的條件變異數則變成 $\sigma_t^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \gamma)\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$，而若前一期是好消息，$D_{t-1} = 0$，則(1.21)的條件變異數則變成 $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$。

1.4 共變異數之計算

- 移動平均法

$$Cov_{t+1}(x, y) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y) \qquad (1.22)$$

- 指數平均法

$$Cov_{t+1} = (1-\lambda)(x_t - \mu_x)(y_t - \mu_y) + \lambda Cov_t \qquad (1.23)$$

$$\mathrm{Cov}_{t+1}^2 = (1-\lambda)\left[(x_t - \mu_x)(y_t - \mu_y) + \lambda(x_{t-1} - \mu_x)(y_{t-1} - \mu_y) + \lambda^2 (x_{t-2} - \mu_{t-2})(y_{t-2} - \mu_y) + \cdots\right]$$

$$Cov_{31}^2 = (1-\lambda)\left[(x_{30} - \mu_x)(y_{30} - \mu_y) + \lambda(x_{29} - \mu_x)(y_{29} - \mu_y) + \lambda^2 (x_{28} - \mu_x)(y_{28} - \mu_y) + \cdots\right]$$

■ 加權平均法

$$Cov_{t+1}^{2}=\lambda_t(x_t-\mu_x)(y_t-\mu_y)+\lambda_{t-1}(x_{t-1}-\mu_x)(y_{t-i}-\mu_y)+\lambda_{t-2}(x_{t-2}-\mu_x)(y_{t-2}-\mu_y)+\cdots \tag{1.24}$$

1.4.1 變異數法運算說明

代號及公式說明如下：

SR：證券報酬率（上市）

SR1：證券報酬率（上櫃）

DR1：指標債券報酬率

ER1：匯率報酬率

PR：美元存款報酬率

M（共變異數矩陣）利用 SR、SR1、DR1、ER1、PR ..的資料計算共變異矩陣

變異數：$Var(X)=\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\overline{X})^2}{n-1}$

共變異數：$Cov(X,Y)=\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\overline{X})(Y_i-\overline{Y})}{n-1}$

表 1-2　M(共變異數矩陣)

	股價-SR	日圓-SR1	美元-DR1	利率30天-ER1	利率1年-PR	
股價-SR	Var(SR)	Cov(SR1,SR)	Cov(DR1,SR)	Cov(ER1,SR)	Cov(PR,SR)	…
日圓-SR1	Cov(SR1,SR)	Var(SR1)	Cov(DR1,SR1)	Cov(ER1,SR1)	Cov(PR,SR1)	…
美元-DR1	Cov(DR1,SR)	Cov(DR1,SR1)	Var(DR1)	Cov(ER1,DR1)	Cov(PR,DR1)	…
利率30天-EF	Cov(ER1,SR)	Cov(ER1,SR1)	Cov(ER1,DR1)	Var(ER1)	Cov(PR,ER1)	…
利率1年-PR	Cov(PR,SR)	Cov(PR,SR1)	Cov(PR,DR1)	Cov(PR,ER1)	Var(PR)	…
	:	:	:	:	:	

1.5 風險值運算模型

1.5.1 區域評價法與全域評價法

基本上衡量風險值的方法可分為兩類，第一類是區域評價法(local valuation)，係以局部導數推論可能的波動情況，衡量投資組合的風險；如 Delta 常態法(delta-normal method)使用線性來推導並假設常態分配。因為 Delta 常態法相當容易運算，以一階導數的分析估計值來衡量風險，當風險來源有限的時候，此方法對投資組合的評量是最適當的。

第二種方法是全域評價法(Full valuation)。全域評價法是指完整的對投資組合重新訂價，計算在不同價格水準下，其投資組合損益的情形：

$$dV = V(S_1) - V(S_0) \tag{1.25}$$

其中新的價格 S_1 係由模擬而來，其模擬方法有：歷史模擬法及蒙地卡羅模擬法。

1.5.2 Delta 常態法

Delta-normal 法僅考慮一階導數的風險變動。例如投資組合在期初的價值為：

$$V_0 = V(S_0) \tag{1.26}$$

定義 Δ_0 為一階偏導數，代表現有部位所組成的投資組合對價格改變的敏感度，於是潛在損失 dV 為：

$$dV = \left.\frac{\partial V}{\partial S}\right|_0 dS = \Delta_0 \times dS \tag{1.27}$$

若分配為常態，投資組合的風險值可由暴險程度的乘積導出，標的變數的風險值為

$$VAR = |\Delta_0| \times VAR_s = |\Delta_0| \times (\alpha \sigma S_0) \tag{1.28}$$

1.5.3 Delta-Gamma 近似法

Delta-Gamma 為 Delta-normal 的延伸，考慮到投資組合價值的二階導數，以提升線性估計的品質：

$$dV = \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dS^2 + \frac{\partial V}{\partial \sigma} d\sigma + ... = \Delta dS + \frac{1}{2}\Gamma dS^2 + \upsilon d\sigma + ... \tag{1.29}$$

其中 Γ 為投資組合價值的二階導數，υ 是波動率的敏感度。

我們利用 Delta-Gamma 法計算買入買權的風險值，可得：

$$\begin{aligned} VAR &= V(S_0) - V(S_0 - \alpha\sigma S_0) \\ &= V(S_0) - [V(S_0) + \Delta(-\alpha\sigma S) + \frac{1}{2}\Gamma(-\alpha\sigma S)^2] \\ &= |\Delta|(\alpha\sigma S_0) - \frac{1}{2}\Gamma(\alpha\sigma S)^2 \end{aligned}$$

上式對於買入、賣出買權或賣權都是有效的。如果 Γ 是正的，表示選擇權為淨買入

部位，第二項將會減少線性的風險值，表示選擇權的下方風險小於由 delta 所估計的結果；如果Γ是負的，則表示選擇權為淨賣出部位，風險值將增加。

但是當價值的函數 V(S)變得複雜時，此轉換就不適用了，因此回到公式(1.29)，現在的問題是要如何處理隨機變數 dS 與dS^2。

最簡單的方法稱為 delta-gamma-delta 法。將二階估計式(1.29)左右二邊取變異數，可得：

$$\sigma^2(dV) = \Delta^2\sigma^2(dS) + (\frac{1}{2}\Gamma)^2\sigma^2(dS^2) + 2(\Delta\frac{1}{2}\Gamma)\operatorname{cov}(dS, dS^2) \tag{1.30}$$

若變數 dS 為常態分配，所有奇次動差(odd moments)為零，則上式中的最後一項即可消去。在同樣假設下，$V(dS^2) = 2V(dS)^2$，則變異數簡化為：

$$\sigma^2(dV) = \Delta^2\sigma^2(dS) + \frac{1}{2}[\Gamma\sigma^2(dS)]^2 \tag{1.31}$$

假設現在 dS 與dS^2為聯合常態分配，則 dV 為常態分配，風險值為：

$$VAR = \alpha\sqrt{(\Delta S\sigma)^2 + \frac{1}{2}(\Gamma S^2\sigma^2)^2} \tag{1.32}$$

其中

Delta 風險部位 ＝ $\alpha\cdot\sqrt{\Delta^2\cdot S^2\cdot\sigma^2}$

Gamma 風險部位 ＝ $VAR(dV) = \alpha\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\left[\Gamma S^2\sigma^2\right]^2}$

1.5.4 多因子分析法(multi-factor models)

相關性乃是投資組合風險背後最重要的驅力。然而，當資產數目過於龐大時，可能會產生一些問題：(1)投資組合的風險可能不是正值，(2)無法精確地估計相關性。因此常常會選擇適當的市場指數來取代，以簡化其共變數矩陣。其中一個簡單的模型稱為對角線模型(diagonal model)，其假設所有資產的共同變動僅源於單一共同因子，亦即市場因子，其模型為：

$$Ri = \alpha_i + \beta_i R_m + \varepsilon_i \tag{1.33}$$

即資產的報酬率來自市場的報酬率 R_m 以及一個非系統性的項目 ε_i，此一非系統性的項目與市場以及各資產間皆不相關。因此，其共變異數矩陣可分解成：

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 & \dots & \beta_N \end{bmatrix} \sigma_m^2 + \begin{bmatrix} \sigma_{\varepsilon,1}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_{\varepsilon,N}^2 \end{bmatrix}$$

則投資組合的變異數為：

$$V(R_P) = V(w'R) = w'\Sigma w = (w'\beta\beta'w)\sigma_m^2 + w'D_\varepsilon w \tag{1.34}$$

如果單一因子模型尚有不足時，多因子模型則可提供較佳的準確性，其模型如下：

$$\begin{aligned} R_1 &= \alpha_1 + \beta_{11}Y_1 + \beta_{12}Y_2 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + \beta_{1k}Y_k + \varepsilon_1 \\ R_2 &= \alpha_2 + \beta_{21}Y_1 + \beta_{22}Y_2 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + \beta_{2k}Y_k + \varepsilon_1 \\ &\vdots \\ R_n &= \alpha_n + \beta_{n1}Y_n + \beta_{n2}Y_n + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + \beta_{nk}Y_k + \varepsilon_n \end{aligned}$$

假設 $R_1,....R_n$ 為 N 個資產的報酬率，$Y_1,....Y_n$ 為N個市場因子，且每個因子都互相獨立。加入多重因子後，共變數矩陣的結構將會較為繁複：

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1k} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \cdots & \beta_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \sigma_{k1} & \cdots & \cdots & \sigma_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{21} & \cdots & \beta_{n1} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{1k} & \beta_{2k} & \cdots & \beta_{nk} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{\varepsilon,1}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{\varepsilon,2}^2 & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \sigma_{\varepsilon,k}^2 \end{bmatrix}$$

計算出投資組合資產之共變異矩陣及現金流量之後，即可利用共變異矩陣乘上現金流量矩陣再乘以累積常態分配之信賴係數，則可計算出此投資組合之風險值。

本系統所提供的市場因子為大盤及各產業之指數、大華公債指數及有效匯率指數，主要用於衡量僅具單一種風險因子之資產，即股票、基金及外匯資產，故此方法僅限計算這三種資產。

1.5.5 歷史模擬法(Historical Simulation)

顧名思義歷史模擬法，即是完全由實際的歷史資料中，求算資產組合風險值的一種方法。在方法的操作上，歷史模擬法利用所持有的資產組合，過去一段期間的歷史價格時間序列，搭配目前持有資產的部位，重新建構資產組合未來報酬值的分配之後，再經過由小到大順序排序，依百分位數求算特定信賴水準下之風險值。舉例說明如下：

假設各項資產過去 101 天的歷史價格日資料已知，則若欲計算投資組合持有一天的風險值，其操作流程包含下列五個步驟：

步驟一：利用各資產過去歷史價格變動量，配合各資產目前的價格，計算各資產的未來價格模擬值。

以第 i 項資產為例。101 筆歷史價格資料時間序列：

$P_i(-101)$，$P_i(-100)$，$P_i(-99)$ ……，$P_i(-1)$ ……

可計算出 100 筆價格報酬率：

$$R_i(100) = \frac{P_i(-100) - P_i(-101)}{P_i(-101)}$$

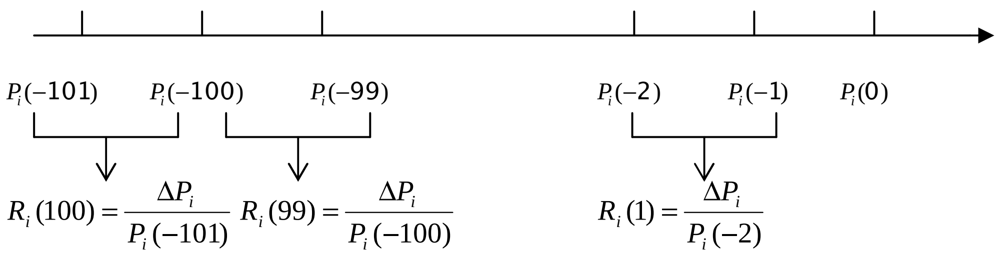
$$R_i(99) = \frac{P_i(-99) - P_i(-100)}{P_i(-100)}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$R_i(1) = \frac{P_i(-1) - P_i(-2)}{P_i(-2)}$$

以圖形表示如下：

圖 1-3 歷史模擬步驟



將此 100 筆報酬率，乘上目前該資產的價格 $P_i(0)$，則可模擬出一天後該資產的預測價格，共得出 100 筆：

$$P_i^*(1) = P_i(0) \times (1 + R_i(1))$$

$$P_i^*(2) = P_i(0) \times (1 + R_i(2))$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$P_i^*(100) = P_i(0) \times (1 + R_i(100))$$

同理，N 項資產的價格模擬值皆可利用此步驟得出：

$P_i^*(\tau) \quad , i = 1,2,\cdots,N$ ； $\tau = 1,2,\cdots 100$ 。

步驟二：將步驟一所求得的各資產價格模擬值，依目前所持有資產之部位權重，重新計算投資組合的價值。如此可得出 100 筆資產價值的模擬值：

$$\begin{array}{cccccc} P_1^*(1) & P_2^*(1) & P_N^*(1) & \longrightarrow & V^*(1) \\ P_1^*(2) & P_2^*(2) & P_N^*(2) & \longrightarrow & V^*(2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_1^*(100) & P_2^*(100) & P_N^*(100) & \longrightarrow & V^*(100) \end{array}$$

步驟三：以各資產目前價格計算投資組合目前的價值。

$$P_1(0) \quad P_2(0) \quad \ldots\ldots \quad P_{100}(0) \qquad \longrightarrow \qquad V(0)$$

步驟四：比較步驟二所求出之未來價值模擬值與資產目前的價值，如此可得出 100 筆未來報酬模擬值。

$$\begin{aligned} \Delta V^*(1) &= V^*(1) - V(0) \\ \Delta V^*(2) &= V^*(2) - V(0) \\ \vdots \qquad & \quad \vdots \\ \Delta V^*(100) &= V^*(100) - V(0) \end{aligned}$$

步驟五：將所建構的未來報酬模擬值 $(\Delta V^*(\tau) \quad \tau = 1,2,\cdots,100)$ ，由小到大順序排列，在給定信賴水準為 1-α 之下，依百分位數即可得出風險值。

雖然歷史模擬法對於歷史報酬率的使用方式是類似一種排序的概念,去選取較差的情形作為風險值的依據，但是並非所有金融商品都是線性的，有些金融商品的價格來源需運用理論模型去運算出來，例如選擇權計算模式等；另外在該利率類金融商品中，需要利用插補的方式將現金流量分配至利率風險因子時(請詳附錄 2A),因此在暴險金額的運算仍需要估計歷史波動之標準差。

1.5.6 蒙地卡羅模擬法

蒙地卡羅模擬法是假設資產價格的變動服從某隨機過程的型態，利用電腦模擬，在目標時間範圍內，產生隨機價格的路徑，並依此建構資產報酬之分配，進而推估風險值，如此不但涵蓋變數的所有可能狀況，也可以處理非常態模型。蒙地卡羅模擬法和歷史模擬法的基本概念類似，但不同之處在於歷史模擬法是以過去的市場交易資料來當作未來的模擬值，蒙地卡羅模擬是從所指定的隨機過程抽取變數來當作市場(風險)因子未來變動量的模擬值。

假設目前投資組合內共有 n 項資產，以蒙地卡羅模擬法計算持有一日之 VaR 的操作程序上主要包含四個步驟：

步驟一：計算投資組合各資產的現值 $P(1)$、$P(2)\cdots P(n)$

步驟二：選擇適合描述資產價格路徑的隨機過程(權益資產為 GBM;利率資產為 Vasicek 模型)。

步驟三：依隨機過程模擬虛擬的資產價格路徑。

步驟四：綜合模擬結果，建構資產報酬率分配，並以此計算投資組合的風險值。

由於本系統所使用的為多變量模型，且為蒙地卡羅模擬法中之隨機模型法，因此僅就蒙地卡羅模擬法中隨機模型法加以介紹。

1.5.7 蒙地卡羅隨機過程模擬路徑

■ 幾何布朗運動模型(Geometric Brownian Motion Model ; GBM)

其為選擇權定價理論的基礎，屬於韋那過程(wiener process)，特性在假設資產價格變動量與時間無關（與過去變動量無關，亦無法預測未來值），其模型如下：

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dW_t \tag{1.35}$$

上式代表資產價格於短時間內(dt)變動行徑。

dS_t 代表 t 期資產價格變動量

S_t 代表 t 期資產價格

μ_t 代表 t 期資產報酬率

σ_t 代表 t 期資產報酬率之標準差(波動性)

dw_t 代表常態分配隨機變數，變異數為 dt（稱為布朗運動），平均數為 0

布朗運動

令變動 w 為韋那過程係經由一隨機衝擊對資產價格產生影響，其於短時間(dt)內 w 之變化量為 $dw=\varepsilon\sqrt{\Delta t}$；$\varepsilon$ 代表常態分配隨機變數;$\varepsilon \sim$N(0,1)，dw 亦服從期望值為零，標準差為 $\sqrt{\Delta t}$ 的常態分配即 $dw \sim N(0,\Delta t)$

資產價格行徑模擬

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dw$$

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_t dt + \sigma_t dw \qquad \frac{dS}{S} \sim N(\mu dt, \sigma^2 dt)$$ ；本系統 μ 假設為 0

$$\Delta S_t = S_{t-1}(\mu\Delta t + \sigma\varepsilon_t\sqrt{\Delta t}) \quad , \quad t=1,2\ldots,N$$

■ 單因子 Vasicek 模型

Vasicek 是最先運用均數復歸(mean-reverting)的概念在利率模型中，其模型如下：

$$dr = \alpha(\mu - r)dt + \sigma dw \tag{1.36}$$

其中 α 為均數復歸調整速度，μ 為瞬間利率的平均值，σ 為瞬間利率的標準差。該模型採用 Ornstein-Uhlenbeck process,亦稱為彈性的隨機漫步(elastic random walk)。一般的隨機漫步或韋那過程為非定態的過程(unstable process),經過一段長時間以後將會發散至無限大的值；而 O-U 過程為一定態分配(stable distribution)，其瞬間趨勢項 $\alpha(\mu-r)$ 表示瞬間利率將以 α 的調整速度趨向長期平均值,此一性質使得短期利率動態過程為均數復歸。假定目前的瞬間利率為 r(t)，則未來某一時點 s 其瞬間利率的條件期望值與變異數為

$$\begin{cases} Et[r(s)] = r(t)e^{-\alpha(s-t)} + \mu(1-e^{\alpha(s-t)}) \\ \operatorname{var}_t[r(s)] = \dfrac{\sigma^2(1-e^{-2\alpha(s-t)})}{2\alpha} \end{cases}$$

則離散自我回歸式 AR(1)如下

$$r(s) = r(t)e^{-\alpha(s-t)} + \mu(1-e^{-\alpha(s-t)}) + \varepsilon(s) \tag{1.37}$$

將上式簡化成下列的迴歸式：

$$r_t = a + br_{t-\Delta t} + e_t \tag{1.38}$$

利用市場短期利率資料跑迴歸方程式，則可解出 a、b 值，並進一步解出參數α、μ，其式子如下：

$$\begin{cases} a = \mu(1-b) \\ b = e^{-\alpha\Delta t} \end{cases}$$

則在時點 t，到期日為 T 之零息債券價格為

$$P(t,T) = e^{-E_t(R)+\frac{V_t(R)}{2}}$$

$$E(R) = r(t)(\frac{1-e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha}) + (\mu - \frac{q\sigma}{\alpha})[T - t - (\frac{1-e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha})]$$ ，其中 q =-0.2718 常數*

$$V(R) = \frac{\sigma^2}{\alpha^2}[T - t - \frac{e^{-2\alpha(T-t)}}{2\alpha} + 2\frac{e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha} - \frac{3}{2\alpha}]$$

算出債券價格 P，可以進一步反推出連續複利 R，公式如下：

$$P = e^{-Rt} \tag{1.39}$$

將得到之參數代入(1.36)，並以此式作為利率之模擬路徑。

1.5.8 蒙地卡羅模擬法相關性之處理

當投資組合包含多項資產時，假設有 n 項，需考慮各資產間之相關性，因此在模擬多變量常態隨機變數時我們必須先使用 Cholesky 分解方法將 n 個資產價格相關性矩陣分解求得一個 $n \times n$ 的下三角矩陣(Lower Triangular)，再利用該矩陣與 $N(0,1)$ 隨機變數之 $n \times 1$ 矩陣相乘即可得到 n 個具有相關性的多變量常態隨機變數，其程序步驟如下：

步驟一：利用 Cholesky 分解法分解對稱的 $n \times n$ 相關性矩陣 Σ，求得一個 Lower Triangular 矩陣 A，使得 $\Sigma = AA'$。

假設 $$\Sigma = \begin{bmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1j} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ v_{i1} & & v_{ij} & & v_{in} \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nj} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix}$$

*The derivation is given by Campbell (1986)

使得 $\Sigma = AA'$ 則 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & & \vdots \\ a_{i1} & & a_{ij} & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ $A' = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & 0 & a_{ij} & & a_{in} \\ \vdots & & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$

公式求解法：令 i, j 分別為 $n \times n$ 對稱矩陣的列（Row）與行（Column）。所以矩陣 A 的每一個元素可經由下列公式求出：

$$a_{ii} = \left(v_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}^2 \right)^{0.5} \qquad a_{ij} = \frac{1}{a_{ii}} \left(v_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} a_{jk} \right)$$

步驟二：解出 A 矩陣內的每一個元素後，將 A 矩陣與 $n \times 1$ 的隨機常態變數矩陣相乘，即可求得 n 個多變量相關常態隨機變數 Y_i，其中 ε_i 是從 $N(0,1)$ 取出的隨機變數。

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_i \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = A \times \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_i \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

步驟三：重複步驟二，則可得.到一連串各資產報酬率的預估值，在給定信賴水準下以此求算投資組合的風險值。

1.5.9 各方法之優缺點比較

- delta gamma 近似法

  優點：☆計算較為容易，可計算增額風險及成份風險，易於分析。

  缺點：★忽略「厚尾」之問題。

  ★無法衡量非線性資產之投資風險值。

- 歷史模擬法

  優點：☆此方法是建立在真正的價格基礎上，可允許非線性資料或非常態分配的資料。

  ☆可考量到「厚尾」的問題。

  ☆不依賴評價模型，因此不會承受模型風險。

缺點：★必須擁有足夠之歷史資料，期間太短可能會受限於估計誤差。

★若樣本期間中省略了重要事件，則尾端可能無法準確地呈現，亦可能包括了未來不會發生的事件。

■ 蒙地卡羅模擬法

優點：☆可計算非線性資產部位的價格風險、波動性風險。

☆可處理具時間變異（time-variant）的變異數、厚尾、不對稱等非常態分配和極端狀況。

缺點：★需要煩雜的電腦技術和大量的重覆抽樣，既昂貴且費時。

★著重於代表價格變動的隨機模型，因此若選擇不當，將會導致模型風險(model risk)的產生。

★模擬所需的樣本數必須要大且足夠，才能使估計出的分配得以與真實的分配接近。